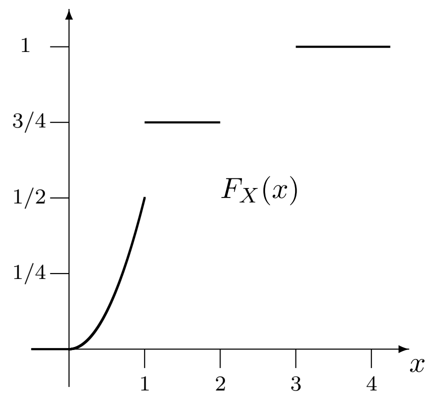
Musterlösung 4

1. a) Wir erhalten folgenden Graphen:



b) Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$
\begin{aligned}
P(\{X < 1/2\}) &= F_X(1/2-) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(1/2 - h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{(1/2 - h)^2}{2} = \frac{1}{8}, \\
P(\{X < 1\}) &= F_X(1-) = \lim_{h \downarrow 0} F_X(1 - h) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{(1 - h)^2}{2} = \frac{1}{2}, \\
P(\{X = 1\}) &= F_X(1) - F_X(1-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
P(\{X = 2\}) &= F_X(2) - F_X(2-) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0, \\
P(\{1 < X \leq 2\}) &= F_X(2) - F_X(1) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0, \\
P(\{1 \leq X < 2\}) &= P(\{1 < X \leq 2\}) + P(\{X = 1\}) - P(\{X = 2\}) \\
&= 0 + \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}, \\
P(\{X \geq 5/2\}) &= 1 - P(\{X < 5/2\}) = 1 - F_X(5/2-) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

c) Die Zufallsvariable X besitzt *keine* Dichte, da sie an der Stelle $x = 1$ nicht stetig ist.

Bitte wenden!

2. **a)** Es gilt $f_Y \geq 0$. Da f_Y eine Dichte sein soll, muss zudem gelten, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = 1.$$

Wir berechnen daher die linke Seite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{c}{(1+y)^5}\, dy = -\frac{c}{4(1+y)^4}\Bigg|_{y=0}^{y=+\infty} = \frac{c}{4}.$$

Die erste Gleichung impliziert, dass $c = 4$.

b) Es gilt $F_Y(y) = 0$, für $y \leq 0$, da $f_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$. Für $y > 0$ erhalten wir

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt = \int_0^{y} \frac{4}{(1+t)^5}\, dt = -\frac{1}{(1+t)^4}\Bigg|_{t=0}^{t=y} = 1 - \frac{1}{(1+y)^4}.$$

Daraus folgt

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(1+y)^4} & \text{falls } y > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerke, dass diese Funktion stetig in 0 ist.

c) Wir schreiben die Verteilungsfunktion von Z mit Hilfe der Verteilungsfunktion von Y: für $z \leq 0$ gilt $F_Z(z) = 0$ und für $z > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Y^{-2} \leq z) = P(Y \geq z^{-\frac{1}{2}}) = 1 - P(Y < z^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 1 - F_Y((z^{-\frac{1}{2}})-) = 1 - F_Y(z^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\left(1 + z^{-\frac{1}{2}}\right)^4}, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass $F_Y((z^{-\frac{1}{2}})-) = F_Y(z^{-\frac{1}{2}})$, was aus der Stetigkeit von F_Y folgt. Wir erhalten, dass

$$F_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+z^{-\frac{1}{2}})^4} & \text{falls } z > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

3. **a)** Da es sich um eine faire Münze handelt, verwenden wir ein Laplace Modell mit $\Omega = \{\text{“Kopf”}, \text{“Zahl”}\}^5$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und alle Elementarereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit $1/2^5 = 1/32$. Wir berechnen $P(X = i)$, für $i = 0, \ldots, 5$. Da wir ein Laplace Modell voraussetzen, müssen wir alle

Siehe nächstes Blatt!

Elementarereignisse zählen, bei denen genau i-mal “Kopf” erscheint. Wir erhalten $\binom{5}{i}$ und somit $P(X = i) = \binom{5}{i}/32$. Als Verteilungsfunktion erhalten wir

$$F_X(x) = \sum_{i \le x;\, 0 \le i \le 5} \frac{\binom{5}{i}}{32} = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ 1/32 & \text{falls } 0 \le x < 1, \\ 3/16 & \text{falls } 1 \le x < 2, \\ 1/2 & \text{falls } 2 \le x < 3, \\ 13/16 & \text{falls } 3 \le x < 4, \\ 31/32 & \text{falls } 4 \le x < 5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Wir bemerken, dass der totale Geldbetrag Y nach dem Spiel nur von der Anzahl erschienenen “Köpfe” abhängt. Es gilt nämlich $Y = f(X) = (1.1)^X \times (0.9)^{5-X}$. Da f wachsend ist, erhalten wir folgende Verteilungsfunktion von Y:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 0.9^5, \\ 1/32 & \text{falls } 0.9^5 \le y < 1.1 \times 0.9^4, \\ 3/16 & \text{falls } 1.1 \times 0.9^4 \le y < 1.1^2 \times 0.9^3, \\ 1/2 & \text{falls } 1.1^2 \times 0.9^3 \le y < 1.1^3 \times 0.9^2, \\ 13/16 & \text{falls } 1.1^3 \times 0.9^2 \le y < 1.1^4 \times 0.9^1, \\ 31/32 & \text{falls } 1.1^4 \times 0.9^1 \le y < 1.1^5, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$